LE FUNZIONI GONIOMETRICHE

Di Pietro Aceti

INDICE

1-GRADI E RADIANTI

Iniziamo con il definire un **angolo**.

Un angolo è quella parte di piano delimitata da due semirette che hanno origine comune (lati). Se essi contengono il prolungamento dei propri lati vengono detti concavi se non li contengono vengono detti convessi.

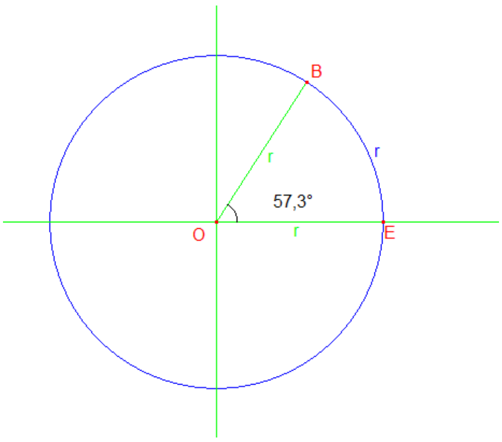
La misura degli angoli può essere fatta con 2 differenti sistemi di misura:

-il sistema sessagesimale,a basa 60, ovvero i gradi

-oppure mediante i radianti, che permettono un sviluppo più facile dei calcoli.

Il **radiante**, data una circonferenza, è l'angolo al centro che sottende un arco di lunghezza pari al raggio. Esso non dipende dall'ampiezza della circonferenza e vale circa 57.3°

Angolo in gradi	Misura dell'arco che sottende	Angolo in radianti
360	La circonferenza 2π r	2π
180	Mezza circonferenza π r	π
90	¼ di circonferenza $\frac{\pi}{2}$r	$\frac{\pi}{2}$
45	1/8 di circonferenza $\frac{\pi}{4}$r	$\frac{\pi}{4}$
57.3	Sottende un raggio 1r	1



-tabella1- faccio notare che il valore del radiante è il numero di volte in cui il raggio sta all'interno dell'arco sotteso da un angolo. Quindi se un angolo sottiene un arco pari a 4 volte il raggio la misura in radianti di quel angolo sarà evidentemente 4. Quindi se l'arco sotteso da un angolo è π r evidentemente la misura dell'angolo in radianti sarà π

N.B. ne deriva che la lunghezza dell'arco è uguale a $l = \alpha r$

Data la misura dell'angolo in gradi per trovare la misura in radianti basta risolvere questa semplice proporzione:

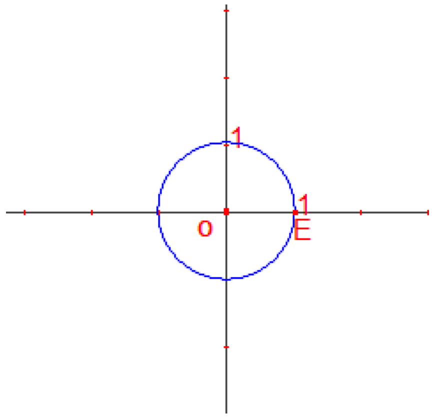
angolo dato:360=x:2π

EXS: angolo di 90°

$$90 : 360 = x : 2\pi$$

$$x = \frac{90 \bullet 2\pi}{360} \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

2-CIRCONFERENZA GONIOMETRICA



Si definisce circonferenza goniometrica quella circonferenza con origine nell'origine degli assi cartesiani e con raggio uguale a 1, ossia quella circonferenza di equazione $x^2+y^2=1$.

Il punto E(1;0) si dice origine degli archi

3-FUNZIONI GONIOMETRICHE

Le funzioni goniometriche sono operatori matematici che associano alla misura dell' ampiezza di un angolo un numero reale. introduco seno, coseno, tangente.

È opportuno segnalare la presenza dei reciproci di questi operatori, in ordine cosecante, secante, cotangente.

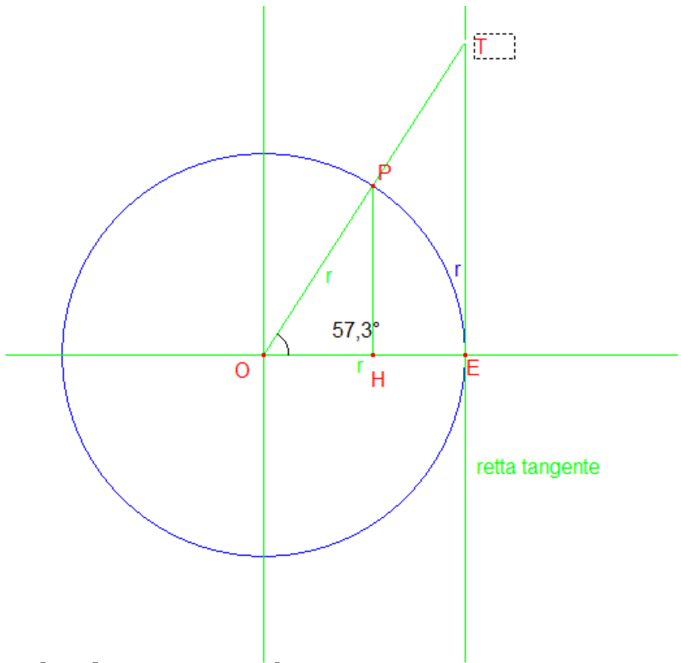


fig: faccio notare che coseno e seno corrispondono respettivamente all'ascissa e all'ordinata di P

Considero il triangolo OPH

-Si definisce $sen\alpha = \dfrac{\text{cateto opposto ad } \alpha}{\text{ipotenusa (raggio)}} \rightarrow \dfrac{PH}{PO}$

- Si definisce $\cos\alpha \rightarrow \dfrac{\text{cateto adiacente ad } \alpha}{\text{ipotenusa (raggio)}} \rightarrow \dfrac{OH}{PO}$

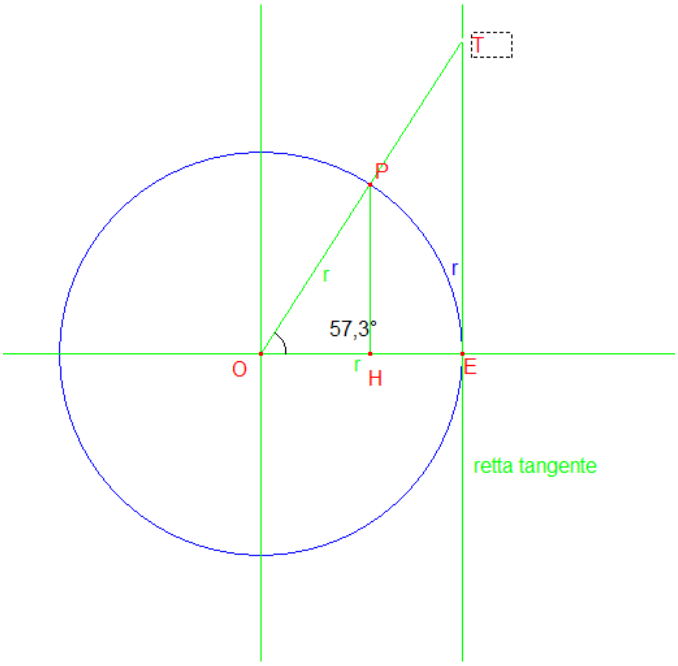
Considero il triangolo OTE $\doteq$ OPH

-Si definisce $tg\alpha \rightarrow \dfrac{\text{cateto opposto ad } \alpha}{\text{cateto adiacente ad} \alpha \text{ (raggio)}} \rightarrow \dfrac{TE}{\mathrm{OE}}$

quindi essendo i triangoli simili posso scrivere

$$\frac{TE}{OE}=\frac{PH}{OH}$$

4-PRIMO TEOREMA FONDAMENTALE DELLA GONIOMETRIA



Il primo teorema fondamentale afferma questa uguaglianza:

$\cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1$

Infatti applicando Pitagora all triangolo OPH
Posso dire che:

$$\frac{OH^2}{R^2} + \frac{PH^2}{R^2} = \frac{R^2}{R^2} \rightarrow \cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1$$

5- SECONDO TEOREMA FONDAMENTALE DALLA GONIOMETRIA

Abbiamo definito la tangente $\frac{PH}{OH}$

Per la proprietà invariantiva possiamo dividere entrambi i membri della divisione per uno stesso numero.

Dividiamo entrambi i membri per r.

$\frac{\frac{PH}{r}}{\frac{OH}{r}}$ ma $\frac{PH}{r} = sen\alpha$ e $\frac{OH}{r} = \cos\alpha$ quindi $tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$

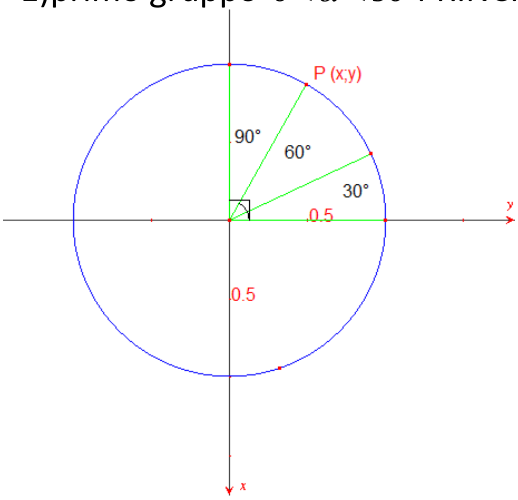
5- AREA DEL SETTORE CIRCOLARE

$$\frac{\text{area settore circolare}}{\pi r^2} = \frac{l}{2\pi r} \rightarrow \text{area settore circolare} = \frac{\text{lr}}{2}$$

7-VALORI PRINCIPALE DI SENO COSENO TANGENTE COSECANTE SECANTE COTANGENTE

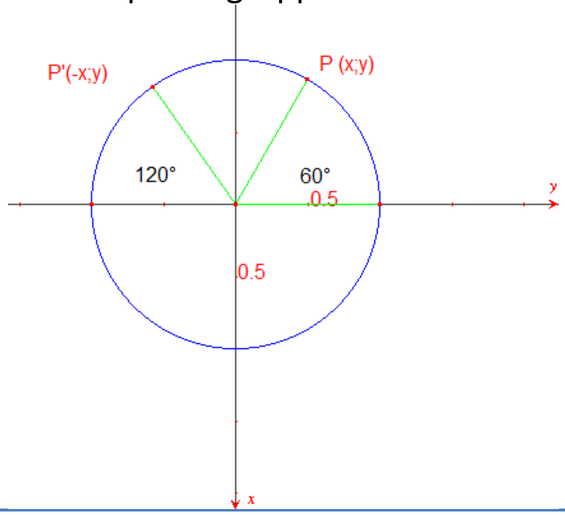
Per avere una maggiore praticità e velocità nell' eseguire gli esercizi è opportuno sapere a memoria i valori di seno coseno tangente cosecante secante cotangente. Qui di seguito riporto una tabella dove sono indicati i valori degli angoli più importanti, i valori di seno e coseno vengono dedotti da dimostrazioni nelle quali a seconda dell'angolo si crea un triangolo particolare che si costruisce all'interno della circonferenza goniometrica. Da seno e coseno si deducono tangente cosecante secante cotangente (ovvero rispettivamente i reciproci di seno coseno e tangente)

1)primo gruppo $0 < \alpha < 90$ PRINCIPALE



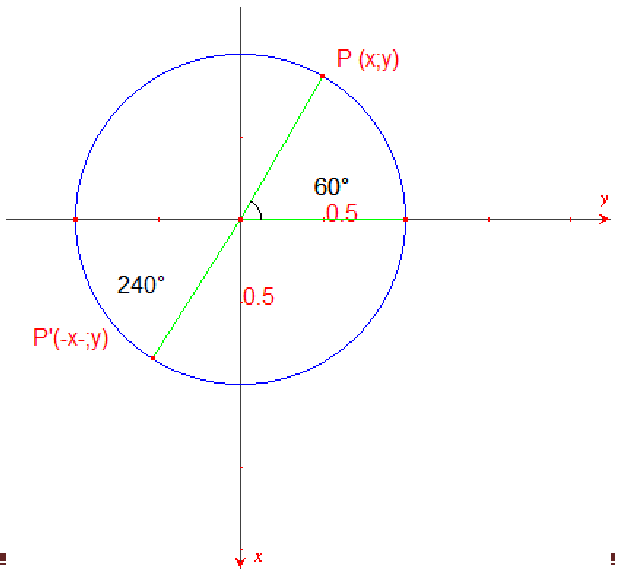
Gradi	Radianti	Seno	Coseno	Tangente	Cosecante	Secante	Cotangente
0°	0	0	1	0	Non esiste	1	Non esiste
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Non esiste	1	Non esiste	0

2) gruppo $90<\alpha<180$ si derivano dal supplementare del primo gruppo infatti:
seno= seno angolo complementare
coseno= -coseno angolo complementare
tangente=- tangente



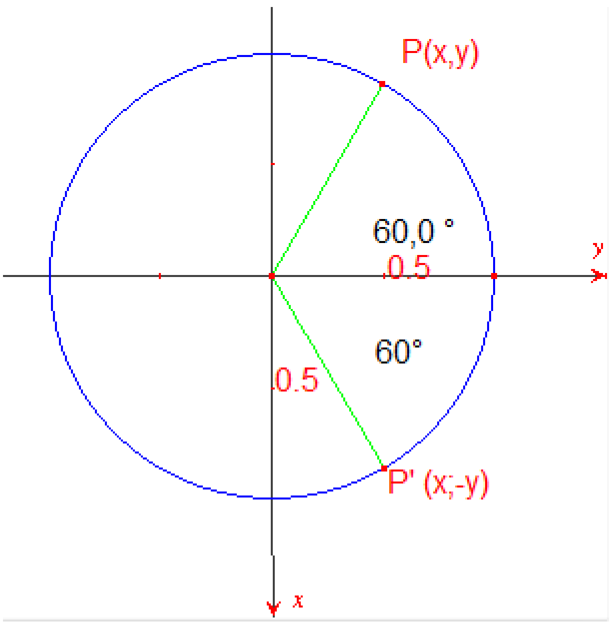
Gradi	Radianti	Seno	Coseno	Tangente	Cosecante	Secante	Cotangente
120°	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	-2	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
135°	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	-1
150°	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$
180°	π	1	0	0	Non esiste	-1	Non esiste

3) gruppo 2) gruppo $180<\alpha<270$ si derivano dal supplementare del primo gruppo infatti:
seno= -seno angolo complementare
coseno= -coseno angolo complementare
tangente=tangente



	Radianti	Seno	Coseno	Tangente	Cosecante	Secante	Cotangente
210°	$\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
225°	$\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	1
240°	$\frac{4}{3}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
270°	$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	Non esiste	-1	Non esiste	0

3) gruppo 2) gruppo $270<\alpha<360$ si derivano dal supplementare del primo gruppo infatti:
seno= -seno angolo complementare
coseno= -coseno angolo complementare
tangente=tangente



Gradi	Radianti	Seno	Coseno	Tangente	Cosecante	Secante	Cotangente
300°	$\frac{5}{3}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
315°	$\frac{7}{4}\pi$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	-1
330°	$\frac{11}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$
360°	2π	0	1	0	Non esiste	1	Non esiste